Contenido

[1. Derivación compuesta 2](#_Toc149748346)

[1.1. Varias variables independientes 2](#_Toc149748347)

[1.2. Una sola variable independiente 2](#_Toc149748348)

[1.3. Otras posibilidades. Ejemplo de aplicación económica. 3](#_Toc149748349)

[1.1. Aproximación de Δy con la diferencial 5](#_Toc149748350)

[1.2. Extensión de la definición de diferencial a n variables 6](#_Toc149748351)

[2. Diferenciabilidad de una función 6](#_Toc149748352)

[2.1. Condiciones necesarias de diferenciabilidad 6](#_Toc149748353)

[2.2. Condición suficiente de diferenciabilidad 7](#_Toc149748354)

[3. Polinomio de Taylor de una variable 7](#_Toc149748355)

[3.1. Polinomio de Taylor de varias variables 10](#_Toc149748356)

# Derivación compuesta

## Varias variables independientes

La situación que se presenta ahora es una función y que es función de x1, x2,…,xn, y=f(x1, x2,…,xn). Pero al contrario que hasta ahora, las variables x1, x2,…,xn también son dependientes a su vez de t1, t2,…,Pn. En esta situación la función y dependerá en última instancia de estas últimas variables independientes. Se puede ver a modo de ejemplo un árbol de dependencias para la función y que es función de x1, x2 y x3, con x1, x2 y x3 que a su vez dependen de t1, t2 y t3:

|  |  |
| --- | --- |
| y=f(x1, x2, x3) | x1=f(t1, t2, t3)  x2=f(t1, t2, t3)  x2=f(t1, t2, t3) |

Diagrama

Descripción generada automáticamente con confianza media

Como en definitiva y depende de t1, t2 y t3 tendría sentido que pidieran las derivadas parciales de y respecto de estas 3 variables. Ello puede calcularse directamente aplicando la regla de la cadena del siguiente modo:

## Una sola variable independiente

Pero también se pueden dar otras posibilidades como que por ejemplo las variables x1, x2, x3 solo dependan de una variable t.

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Esto implica que no habría que aplicar el concepto de derivada parcial, si no, el de diferencial.

## Otras posibilidades. Ejemplo de aplicación económica.

Se pueden dar otras combinaciones como por ejemplo la siguiente:

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Como se ve todas las variables intermedias x1, x2, x3 dependen de t1, pero luego también dependen de otra variable de la que no dependen las demás variables.

En economía se pueden ver este tipo de funciones. Por ejemplo: se tiene la función beneficio de una empresa que depende de las ventas de 3 productos, B(x1, x2, x3). Por su parte la venta de cada producto depende del precio del producto en si mismo (P1, P2, P3) y de la inversión en publicidad (P) que haga la empresa. El árbol quedaría del siguiente modo:

Diagrama

Descripción generada automáticamente

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | | |

En esta situación dado la función y dependerá en última instancia de las variables independientes

Sea una función f(x) y x0, un punto cualquiera de la función. A continuación, se avanza en el sentido positivo del eje x y se escoge otro punto genérico x de tal modo que podemos definir:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

A continuación, por el punto x0 se hace pasar una recta tangente a la función f(x), de modo que se puede definir el triángulo rectángulo que se puede ver en color verde en la figura de abajo. Se define:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Como habíamos visto en la interpretación geométrica, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, por tanto:

A dy simplemente la llamados diferencial de f y su definición se obtiene de despejar dy en la ecuación anterior:

## Aproximación de Δy con la diferencial

Como puede deducirse de la observación de la gráfica de arriba cuando Δx es muy pequeño la gráfica y la tangente están muy juntas y Δy y dy son prácticamente iguales. Teóricamente podemos decir que:

Es decir, para valores Δx suficientemente pequeños Δy≈dy, por lo que podríamos escribir la siguiente ecuación:

## Extensión de la definición de diferencial a n variables

Del mismo modo que se definió la diferencial de una variable, ahora se puede definir la diferencial en n variables. En particular para 2 variables, la diferencial quedaría así:

Para n variables:

Que también se podría expresar vectorialmente:

# Diferenciabilidad de una función

Una función de 2 variables es diferenciable si se cumple la afirmación:

Esta afirmación ya se había visto en el apartado 1.1 en la página 2 pero referida a funciones de una variable. En la práctica esta afirmación da lugar a una ecuación y teóricamente se podría usar esa ecuación para determinar la diferenciabilidad, pero en la práctica ese cálculo se suele complicar bastante por lo que para facilitar la determinación de la diferenciabilidad se usan una serie de teoremas que se van a ver a continuación.

## Condiciones necesarias de diferenciabilidad

* Condición necesaria de la continuidad: si f es diferenciable 🡪 f es continua.

¿Por qué es condición necesaria? ¿Cómo ayuda esto a resolver ejercicios?

La condición es necesaria, porque es necesario que la función sea continua para que sea diferenciable. En la práctica para resolver ejercicios, se usa al revés y negada:

**Si f no es continua 🡪 no es diferenciable**

¡Cuidado, que la condición solo sea necesaria y no suficiente significa que f puede ser continua y aun así no ser diferenciable! Como ejemplo de esto, podemos ver la función f(x)=|x|, cuya gráfica se puede ver a continuación

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

* Condición necesaria de la existencia de las derivadas parciales: si f es diferenciable 🡪 existen todas las derivadas parciales.

¿Por qué es condición necesaria? ¿Cómo ayuda esto a resolver ejercicios?

La condición es necesaria, porque es necesario que existan las derivadas parciales para que la función sea diferenciable. En la práctica para resolver ejercicios también se usa al revés y negada:

**Si las derivadas parciales no existen 🡪 no es diferenciable**

¡Cuidado, ue la condición solo sea necesaria y no suficiente significa que las derivadas parciales pueden existir y aun así no ser diferenciable!

## Condición suficiente de diferenciabilidad

Si existen las derivadas parciales y son continuas, entonces f es derivable.

¿Por qué es condición suficiente? ¿Cómo ayuda esto a resolver ejercicios?

Es condición suficiente porque es suficiente que las derivadas parciales sean continuas para que la función sea diferenciable. Sin embargo, al no ser condición necesaria, no es necesario que las derivadas parciales sean continuas para que la función sea diferenciable; por lo que podemos encontrar funciones que sean diferenciables pero que sus derivadas parciales no sean continuas.

En este caso para resolver los ejercicios se usará la condición tal cual se ha enunciado:

**Si las derivadas parciales son continuas** 🡪 **diferenciable**

# Polinomio de Taylor de una variable

Para aproximar el valor de una función en un punto se puede usar la diferencial como se vio anteriormente. El polinomio de Taylor es otro método de aproximación más fiable que basa en la construcción de un polinomio que se parezca a la función en el entorno del punto.

La aproximación más sencilla y también la menos precisa es un polinomio P(x) de grado 1 (una recta) cuyo valor P(x0) coincida con el valor de la función en ese punto f(x0).

La gráfica de abajo es:

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Como se puede comprobar, la función f(x) en verde y el polinomio, en negro, no se parecen en nada, salvo que ambas pasan por el punto (0,1).

Una aproximación mejor será un polinomio cuya primera derivada coincida con la primera derivada de la función:

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

El polinomio ahora se parece un poco más que el anterior.

Pero todavía se podría mejorar la aproximación construyendo un polinomio en cual la segunda derivada del polinomio también coincida con la segunda derivada de la función:

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Ahora se puede considerar que la función f(x) en verde y el polinomio en negro, son notoriamente parecidos en el entorno de x0=0.

Por último, se hará también que la tercera derivada del polinomio coincida con la tercera derivada de la función:

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Este proceso podría continuar, haciendo que las derivadas de orden superior del polinomio coincidan con las derivadas de orden superior de la función, de modo que el polinomio se parezca cada vez más a la función.

Aplicando este criterio y haciendo una serie de desarrollos matemáticos se construye el polinomio de Taylor de grado n cuya fórmula es:

## Polinomio de Taylor de varias variables

El concepto de polinomio de Taylor de una variable se puede extender a 2 variables, teniendo en cuenta que ahora aparecerán derivadas parciales en x e y. El polinomio de Taylor de grado 2:

La fórmula anterior es perfectamente útil para calcular un polinomio de Taylor. No obstante, atendiendo a las reglas del cálculo matricial, la anterior ecuación también se podría escribir así:

Podemos expresar la ecuación anterior de forma vectorial:

La ecuación anterior es en realidad multivariable, simplemente definiendo los vectores del siguiente modo:

Nota: en los ejercicios de la universidad se suele dejar el vector h sin desarrollar resultando un polinomio en función de h